

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

STABILNÍ A CHAOTICKÉ CHOVÁNÍ LORENZOVA SYSTÉMU

STABILITY AND CHAOTIC BEHAVIOUR OF THE LORENZ SYSTEM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ELIŠKA OBORNÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Eliška Oborná

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému

v anglickém jazyce:

Stability and chaotic behaviour of the Lorenz system

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Lorenzův systém je tvořen nelineární soustavou tří diferenciálních rovnic popisujících procesy související s prouděním v atmosféře. Pro jistou množinu vstupních parametrů (Prandtlovo číslo a Rayleighovo číslo) vykazuje tento systém chaotické chování.

Cíle bakalářské práce:

1. Sestavení Lorenzova modelu
2. Analýza jeho kvalitativních vlastností
3. Testování teoretických výsledků a jejich grafické interpretace

Seznam odborné literatury:

1. M.W. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, San Diego, 2003.

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 24.11.2014

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou chování Lorenzova modelu konvektivního proudění v atmosféře v závislosti na Rayleighově čísle. Nabízí několik postupů při analýze stability nelineárních soustav autonomních diferenciálních rovnic prvního řádu. Součástí práce je také úvod do problematiky deterministického chaosu projevujícího se u dynamických systémů s parametrem. Práce je doplněna grafickými interpretacemi stabilního a chaotického chování pomocí softwaru Maple.

Summary

This bachelor's thesis analyzes the behavior of the Lorenz's model of convective flow in the atmosphere depending on the Rayleigh number. It offers several methods when analyzing stability of nonlinear systems of the first order autonomous differential equations. Part of the work also consists of introduction to deterministic chaos which appears in dynamic systems with a parameter. The work is supported by graphic interpretation of a stable and chaotic behavior by using the software Maple.

Klíčová slova

Lorenzův model, autonomní systém diferenciálních rovnic, linearizace, stabilita singulárního bodu, chaotické chování.

Keywords

Lorenz system, autonomous system of differential equations, linearization, stability of an equilibrium, chaotic behaviour.

OBORNÁ, E. *Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 36 s. Vedoucí doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Stabilní a chaotické chování Lorenzova systému* vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Eliška Oborná

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému školiteli doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za odborné vedení mé bakalářské práce, cenné rady, čas a trpělivost při mnohých konzultacích.

Eliška Oborná

Obsah

1	Úvod	12
2	Matematický aparát	14
2.1	Autonomní systém	14
2.2	Stabilita singulárních bodů	15
2.3	Typy singulárních bodů v prostoru	17
2.4	Bifurkace	18
2.5	Atraktor	18
2.6	Cardanovy vzorce	18
2.7	Routh-Hurwitzovo kritérium	19
3	Sestavení Lorenzova modelu	20
4	Analýza Lorenzova modelu	23
4.1	Analýza stability Lorenzova modelu	23
4.1.1	Stabilita v singulárním bodě S_1	24
4.1.2	Ljapunovova metoda pro singulární bod S_1	25
4.1.3	Stabilita v singulárním bodě $S_{2,3}$	26
4.2	Lorenzův atraktor a chaos	30
5	Grafické interpretace teoretických výsledků	32
6	Závěr	35

1. Úvod

Lorenzův model je soustava tří nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic (ODR), které zjednodušeně popisují proudění vzduchu v atmosféře. V roce 1963 jej vytvořil Edward Norton Lorenz, americký meteorolog a matematik, který se zabýval modelováním konvekce v tekutině.

Vyšetřováním tohoto modelu započala éra zkoumání deterministického chaosu, kdy se analyzují vlastnosti dynamických systémů v závislosti na jednom či více parametrech. Abychom mohli posoudit chování nějakého systému je nutné znát tři základní kameny: evoluční časové rovnice, hodnoty parametrů popisující systém a počáteční podmínky - jestliže tyto tři aspekty kompletně určují vývoj chování daného systému, můžeme o něm prohlásit, že je deterministický. Zatímco u lineárních systémů lze s časem předvídat jejich vývoj, jedním z možných rysů nelineárních dynamických systémů dimenze větší či rovna 3 je jejich "chaotičnost", tedy schopnost systému nepředvídatelně reagovat na nepatrnou změnu v jeho počátečním stavu. Přesněji řečeno jde o extrémní citlivost na počáteční podmínky. Konkrétně u Lorenzova modelu může (s trochou nadsázky) mávnutí křídel motýla na jedné straně planety vyvolat bouři o několik stovek kilometrů od místa "nepatrného impulsu". (Právě podobnost Lorenzova atraktoru dala popsané situaci již zpopularizovaný název tzv. Motýlí efekt.) Přesná definice chaosu je poměrně složitá záležitost, kdy existuje více přístupů. Všechny ovšem sdílejí charakteristiky jeho základních vlastností.

První výraznou vlastností chaosu je již zmíněná citlivost systému na počáteční podmínky. Dále se jedná o neperiodické či často nepředvídatelné chování (systém s postupem času neopakuje svůj předchozí stav) a rovněž fraktální strukturu tzv. chaotických atraktorů.



Obrázek 1.1: Edward Norton Lorenz (1917-2008) [9]

Struktura této práce je následující. Ve druhé kapitole je uveden nezbytný matematický aparát, pomocí kterého budeme provádět pozdější analýzu Lorenzova modelu. Kapitola je rozčleněna do několika sekcí, konkrétně jsou zde popsány pojmy jako autonomní systém, singulární řešení, hyperbolický bod, Ljapunovova věta, bifurkace či atraktor. Dále se zde objeví problematika související s Routh-Hurwitzovým kritériem či Cardanovými vzorci.

Třetí kapitola s názvem Sestavení Lorenzova modelu se zabývá popisem fyzikální situace, ze které se při odvození nelineárního systému ODR vychází. Jedná se o představu konvekce tenké vrstvy tekutiny, která je zdola ohřívána a ze shora ochlazována. Základními vztahy pro odvození soustavy diferenciálních rovnic daného systému jsou fundamentální rovnice v oblasti hydromechaniky a termomechaniky. Jedná se o rovnici kontinuity, Navier-Stokesovu rovnici proudění nestlačitelné tekutiny a Fourierovu rovnici vedení tepla. Na konci kapitoly je uvedena soustava tří nelineárních ODR, jež Lorenzův model popisuje.

Stěžejní kapitolou této práce je kapitola čtvrtá s názvem Analýza Lorenzova modelu. Rovněž se člení na dvě podkapitoly. V první z nich je přistoupeno k podrobnému vyšetřování stability modelu. Pomocí různých technik se budeme snažit zkoumat závislost systému na poměru vztlakové a viskózní síly. Používá se zde metoda linearizace, dále Ljapunovovy věty či Routh-Hurwitzovo kritérium. Ve druhé podkapitole nejprve shrneme teoretické výsledky týkající se lokální stability a naznačíme souvislosti s hlavními jevy Lorenzova modelu, tzv. Lorenzovým atraktorem a chaotickým chováním. Rigorózní zavedení a matematická analýza těchto pojmů přesahuje rámec této bakalářské práce.

Poslední pátá kapitola navazuje na předchozí analýzu stability Lorenzova modelu. Budeme zkoumat výsledky dosažené při teoretických úvahách a kalkulacích. Použitím softwaru Maple podáme grafické interpretace, čímž si dříve získané výsledky ověříme.

2. Matematický aparát

Pojmy a vlastnosti uvedené v této kapitole patří do základů teorie dynamických systémů a lze je nalézt například v [2], [3], [4], [5], [10], [11], [13] a [14].

Dříve, než si uvedeme věty a definice, které budeme potřebovat v dalších kapitolách, intuitivně zavedme pojem *dynamického systému*.

Dynamický systém je způsob, jak lze v určitém časovém úseku popsat všechny body daného prostoru. Prostorem se myslí například stavový prostor nějakého fyzikálního systému (stavové veličiny charakterizující stav daného systému jsou např. teplota, tlak či objem). V mechanice může tímto prostorem být množina všech možných poloh a rychlostí systému.

Stav, ve kterém se dynamický systém nachází, můžeme popsat konečnou množinou stavových veličin (proměnných). Vývoj systému v čase je zcela určen jeho okamžitým stavem.

2.1. Autonomní systém

Dynamika pohybu v rámci dynamických systémů je obvykle určena soustavou diferenciálních či diferenciálních rovnic. V případě Lorenzova modelu se jedná o tzv. *autonomní diferenciální systémy*.

Definice 2.1.1. Soustava diferenciálních rovnic $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ se nazývá *autonomní*, jestliže nezávisí na nezávislé proměnné t . Autonomní systémy popisují jevy, při kterých se s časem nemění jejich podmínky (tj. data tvořící daný jev).

Mějme autonomní soustavu ODR1 s počáteční úlohou ve tvaru

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{a},$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definovaná a spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Definice 2.1.2. Graf řešení $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka $\{(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \mid t \in I\}$ v prostoru \mathbb{R}^{n+1} .

Definice 2.1.3. Trajektorie je průmět řešení $\mathbf{y}(t)$ do prostoru hodnot řešení, tzv. *fázového prostoru*, tj. křivka $\{(y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$. Určení pohybu hodnoty řešení po trajektorii je znázorněno šipkami, které označují orientaci křivek.

Definice 2.1.4. Jednobovou množinu $\{\mathbf{y}^*\}$, která je trajektorií konstantního (stacionárního) řešení $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*$, nazveme *singulární bod* (také stacionární bod, bod rovnováhy, singulární řešení). Uzavřenou křivku nazveme *cyklus*, jestliže je trajektorií (nekonstantního) periodického řešení $\mathbf{y}(t)$.

2.2. Stabilita singulárních bodů

Při analýze systému autonomních diferenciálních rovnic je často nutné posoudit stabilitu singulárních bodů, tudíž vlastnost, která zaručuje předvídatelnost chování systému v jejich okolí.

Definice 2.2.1. Nechť $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ je singulární bod soustavy diferenciálních rovnic

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (2.1)$$

tj. $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Řekneme, že singulární bod \mathbf{y}^* je *stabilní*, jestliže ke každému okolí \mathcal{O} bodu $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ existuje okolí $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$ bodu $\mathbf{y}^* \in \mathcal{O}$ takové, že každé řešení $\mathbf{y}(t)$ s podmínkou $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^* \in \mathcal{O}_1$ je v \mathcal{O} definované a zůstává zde pro všechna $t > 0$. Jestliže navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*,$$

pak se singulární bod \mathbf{y}^* nazývá *asymptoticky stabilní (neboli atraktivní)*.

Stabilitu singulárního bodu \mathbf{y}^* soustavy (2.1) určujeme pomocí reálných částí vlastních čísel tzv. *Jacobiho matice*

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}^*) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Pro daný singulární bod a odpovídající Jacobiho matici pak vypočteme její *vlastní čísla* λ jako řešení *charakteristické rovnice*

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde $\mathbf{I} = \text{diag}(1, \dots, 1)$ je jednotková matice s jedničkami na hlavní diagonále.

Definice 2.2.2. Singulární bod nazveme *hyperbolický*, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice mají nenulovou reálnou část.

Pro hyperbolické body platí, že malé odchylky kvalitativně nemění fázový portrét blízko stacionárních bodů.

Definice 2.2.3. Singulární bod nazveme *nehyperbolický*, jestliže alespoň jedno vlastní číslo je nulové či má nulovou reálnou část.

Nehyperbolické body nejsou strukturálně stabilní (tj. při malých odchylkách dochází v jejich okolí k lokálním bifurkacím, tedy ke změně stability, k úplnému zmizení bodu, nebo k jeho rozdělení na několik dalších).

Při analýze singulárních bodů nelineárního systému (2.1) se obvykle užívá tzv. *linearizační věta*, která, volně vyjádřeno, říká:

Je-li singulární bod linearizovaného systému hyperbolický, pak je fázový portrét nelineárního systému v okolí tohoto bodu kvalitativně ekvivalentní s jeho linearizovaným portrétem. Oproti tomu linearizace v nehyperbolických bodech nedává žádnou informaci o chování nelineárních systémů.

Pro přesnou formulaci této věty viz např. [4].

Z linearizační věty pak speciálně vyplývá následující.

Věta 2.2.1. Má-li Jacobiho matice $Df(\mathbf{y}^*)$ systému (2.1) všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí, je singulární bod \mathbf{y}^* *asymptoticky stabilní*. Má-li alespoň jedno vlastní číslo s kladnou reálnou částí, potom je singulární bod \mathbf{y}^* *nestabilní*.

Dále poznamenejme, že je-li alespoň jedno vlastní číslo s nulovou reálnou částí a žádné s kladnou reálnou částí, nelze o stabilitě rovnovážného bodu dle tohoto kritéria rozhodnout. Pro takové případy se dá užít metody Ljapunovovy funkce.

Věta 2.2.2. (*Ljapunovova*) Nechť \mathbf{y}^* je singulární bod systému (2.1) a nechť zobrazení $L : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce definovaná na otevřené množině \mathcal{O} obsahující \mathbf{y}^* . Dále předpokládejme, že:

- a) $L(\mathbf{y}^*) = 0$ a $L(\mathbf{y}) > 0$, jestliže $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$ v $\mathcal{O} - \mathbf{y}^*$,
- b) $L' \leq 0$ v $\mathcal{O} - \mathbf{y}^*$.

Potom je \mathbf{y}^* *stabilní*. Navíc, pokud L také splňuje

- c) $L' < 0$ v $\mathcal{O} - \mathbf{y}^*$,

potom je \mathbf{y}^* *asymptoticky stabilní*.

Funkce L splňující a) i b) se nazývá *Ljapunovská funkce* pro singulární bod \mathbf{y}^* . Jestliže navíc platí c), jde o *striktní Ljapunovskou funkci*.

Dalším souvisejícím pojmem je limitní množina, limitní cyklus a oblast přitažlivosti.

U nelineárních systémů nemusí trajektorie nabývat pro $t \rightarrow \infty$ pouze jedné hodnoty.

Definice 2.2.4. Množina bodů, kterými trajektorie pro $t \rightarrow \infty$ prochází, se nazývá *limitní množina*. Pokud je limitní množinou uzavřená křivka, pak se nazývá *limitní cyklus*.

Definice 2.2.5. Množina bodů ve fázovém prostoru, ve kterém všechny trajektorie, procházející jejími body v čase $t = 0$, v této množině zůstávají i v čase $t > 0$, se nazývá *oblast záchytu*. Pokud navíc v oblasti záchytu existuje neprázdná limitní množina, nazývá se oblast záchytu *oblast přitažlivosti*. Neobsahuje-li oblast záchytu singulární bod, potom v této oblasti existuje limitní cyklus.

2.3. Typy singulárních bodů v prostoru

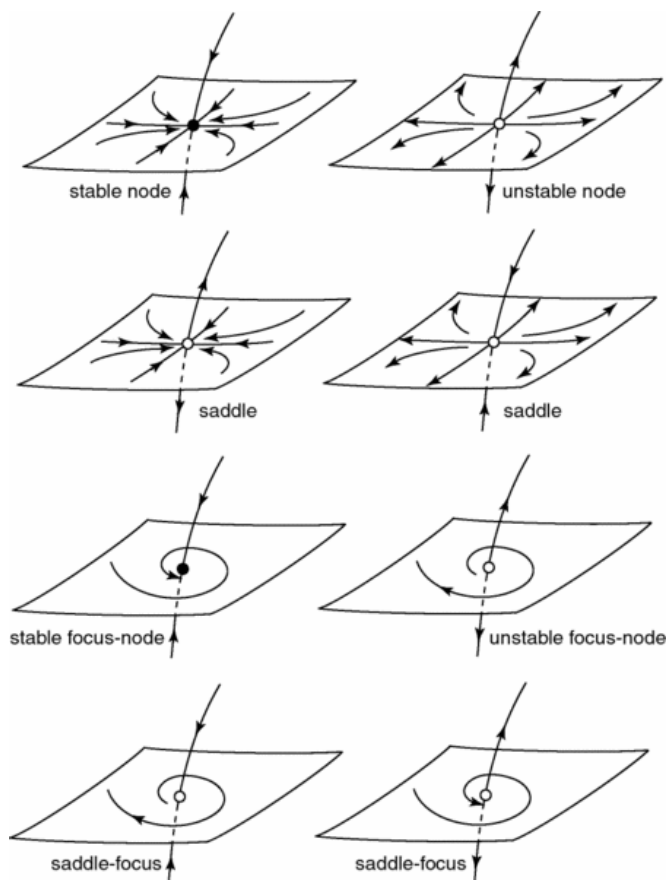
Typy singulárních bodů určujeme podle reálných částí vlastních čísel Jacobiho matice.

V prostoru má tato matice tři vlastní čísla, přičemž jedno musí být reálné a ostatní dvě mohou být obě reálná nebo komplexně sdružená. V závislosti na typech a znaménkách vlastních čísel uveďme některé z hyperbolických bodů v prostoru:

- *uzel (node)*: všechna vlastní čísla jsou reálná a mají stejné znaménko
- *sedlo (saddle)*: všechna vlastní čísla jsou reálná, alespoň jedno je kladné a alespoň jedno záporné (sedlo je vždy nestabilní)
- *ohnisko (focus)*: jedno vlastní číslo je reálné a ostatní dvě jsou komplexně sdružená, všechna jsou stejného znaménka
- *sedlo-ohnisko (saddle-focus)*: jedno vlastní číslo je reálné s opačným znaménkem, než je reálná část ostatních dvou komplexně sdružených vlastních čísel (tento typ stacionárního bodu je vždy nestabilní)

Dále poznamenejme, že existuje mnoho typů nehyperbolických bodů (v okolí takového bodu je fázový portrét závislý na nelineární části vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{y})$).

Většina takovýchto singulárních bodů nemá svůj vlastní název a některé jsou pojmenovány po bifurkaci, která v nich vzniká.



Obrázek 2.1: Singulární body v prostoru [12]

2.4. Bifurkace

Řekneme, že v nehyperbolickém bodě vzniká *bifurkace*, jestliže při malé změně parametru dynamického systému dochází ke kvalitativním změnám stability.

Hopfova bifurkace

Bifurkaci v nehyperbolickém bodě nazveme *Hopfova*, jestliže vlastní čísla matice lineari-
zace jsou ryze imaginární povahy a žádné další vlastní číslo nemá nulovou reálnou část.

Hopfovou bifurkaci dělíme na dva případy:

- *nadkritická* = nehyperbolický bod rovnováhy mění pro bifurkační hodnotu parametru stabilitu a vzniká stabilní limitní cyklus
- *subkritická* = bod rovnováhy mění pro bifurkační hodnotu parametru stabilitu a vzniká nestabilní limitní cyklus

2.5. Atraktor

Atraktor je množina ve fázovém prostoru, ke které jsou přitahovány (atrahovány) trajektorie. Splňuje tyto vlastnosti:

1. je *invariantní* = trajektorie začínající v této množině ji neopustí
2. má tzv. *oblast přitažlivosti* = jde o otevřenou množinu, trajektorie v ní začínající se přibližují k atraktoru
3. je *nerozložitelná* = nemá vlastní podmnožinu, která vyhovuje výše uvedeným podmínkám

2.6. Cardanovy vzorce

Pomocí Cardanových vzorců můžeme vypočítat kořeny polynomů vyšších řádů. Ovšem vzhledem k jejich složitosti nejsou pro praktické využití příliš vhodné.

Mějme polynom třetího stupně

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0. \quad (2.3)$$

Substitucí $x = y - \frac{b}{3a}$ a vydělením číslem a se rovnice (2.3) převede na tvar

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad (2.4)$$

kde

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right).$$

Diskriminantem rovnice (2.4) nazýváme číslo $D = -p^3 - q^2$.

Pro $D \neq 0$ má rovnice (2.4) tři různé kořeny,
 pro $D = 0$ má rovnice (2.4) buď dvojnásobný kořen (pro $p^3 = -q^2 \neq 0$), nebo trojnásobný nulový kořen (pro $p = q = 0$).

Má-li rovnice (2.4) reálné koeficienty, pak
 pro $D > 0$ má tři různé reálné kořeny,
 pro $D < 0$ má jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny,
 pro $D = 0$ má jen reálné kořeny.

2.7. Routh-Hurwitzovo kritérium

Podle linearizační věty je třeba posoudit, zda všechny kořeny charakteristického polynomu příslušné Jacobiho matice mají zápornou reálnou část. Pro tento účel je užitečné následující kritérium.

Věta 2.7.1. (*Routh-Hurwitzovo kritérium stability*)

Mějme polynom,

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

kde koeficienty a_i jsou reálné konstanty, $i = 1, \dots, n$. Definujme Hurwitzovy matice pomocí koeficientů a_i vztahy

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

a

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

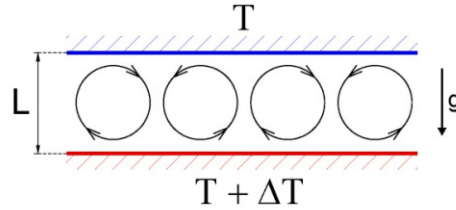
kde $a_j = 0$, jestliže $j > n$. Potom jsou všechny kořeny tohoto polynomu záporné nebo mají záporné reálné části, jestliže determinanty všech Hurwitzových matic jsou kladné, tj.

$$\det H_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3. Sestavení Lorenzova modelu

Jelikož by rigorózní odvození soustavy rovnic pro Lorenzův model přesáhlo rámec bakalářské práce, uvedeme pouze fyzikální předpoklady, ze kterých se při odvození vychází. (konstrukce modelu je k nahlédnutí např. v [1]). Následující text byl inspirován [1], [3], [7] a [8].

Základní představou pro zkoumání přirozeného proudění tekutiny je tzv. *Rayleighova-Bénardova konvekce*. Mějme částici umístěnou mezi dvěma horizontálními deskami (s konstantními teplotami T a ΔT) v gravitačním poli ve vzdálenosti L , která je jimi zdola ohřívána a ze shora ochlazována.



Obrázek 3.1: Rayleighova-Bénardova konvekce [6]

Teplo se tekutinou šíří dle Fourierova zákona vedení tepla.

Systém lze popsat pomocí bezrozměrného podobnostního čísla

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TL^3}{\kappa\nu}$$

kde Ra je *Rayleighovo číslo*, g je gravitační zrychlení, α je koeficient tepelné roztažnosti, ΔT je rozdíl teplot desek, L je vzdálenost desek, κ je tepelná difuzivita (prolínavost) a ν je kinematická viskozita tekutiny. Jmenovatel odpovídá viskózní a čítec pak vztlakové síle. Hustota tekutiny v horní části je větší, tudíž tekutina je těžší, než její spodní část. Jakmile hodnota Ra přesáhne určitou mez Ra_{krit} , tíha horní části převládne nad statickými viskózními silami tekutiny a ta se začne cyklicky pohybovat. Dochází ke konvektivnímu proudění.

Pro popis chování tekutiny v gravitačním poli použijeme tři rovnice, které splňují *Boussinesqovu aproximaci*, kdy zanedbáváme změny vlastností tekutiny (považujeme je za konstantní) kromě její hustoty. Boussinesqovu aproximaci lze použít v případě, kdy vrstva tekutiny není příliš velká a pokud jsou teplotní rozdíly v tekutině malé.

Vycházíme ze ztěžejních rovnic hydromechaniky a termomechaniky:

1) *rovnice kontinuity*

$$\nabla \mathbf{v} = 0$$

\mathbf{v} vektor rychlosti částice

$\nabla \mathbf{v}$ divergence vektoru rychlosti

Divergence vyjadřuje "zřídlovost" tekutiny. Předpoklad nulové divergence vektoru rychlosti částice fyzikálně představuje situaci, kdy do libovolného objemu tekutiny její stejné množství nateče i vyteče.

2) *Navier-Stokesova rovnice proudění nestlačitelné tekutiny* (složky rychlosti proudu v_x a v_z) ⁽¹⁾ ⁽²⁾

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_x &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_z &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z - \frac{\rho}{\rho_0} g\end{aligned}$$

ρ objemová lokální hustota tekutiny, platí $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$

ρ_0 objemová střední hustota tekutiny

p tlak

g tíhové zrychlení

ν viskozita tekutiny

Rovnice vyjadřuje rovnováhu mezi setrvačnými silami na levé straně a silami tlakovými, třecími a objemovými na straně pravé. Jednotlivé členy znamenají: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ lokální zrychlení, $\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}$ konvektivní zrychlení, $\frac{1}{\rho_0} \nabla p$ zrychlení způsobené tlakovými silami, $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ zrychlení od sil překonávajících stlačení a $\frac{\rho}{\rho_0} g$ vnější objemové zrychlení.

3) *Fourierova rovnice vedení tepla*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = k \nabla^2 T$$

T odchylka teploty od její střední hodnoty T_0

k tepelná vodivost

Popis jednotlivých členů: $\frac{\partial T}{\partial t}$ teplotní gradient (směr nárůstu teploty - spád), $\mathbf{v} \nabla T$ rychlost vedení tepla a $k \nabla^2 T$ člen popisující nestacionární vedení tepla. Změna rychlosti teploty tělesa je úměrná k součiniteli tepelné vodivosti k .

¹ $\nabla v_x = \text{grad } v_x = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$
² $\nabla^2 v_x = (\nabla \cdot \nabla) v_x = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2}$

Po několika matematických úpravách a odvozeních dospějeme k soustavě ODR se dvěma nelineárními podmínkami

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\y' &= rx - y - xz \\z' &= xy - bz,\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde $\sigma, r, b > 0$, $\sigma > b + 1$. Význam těchto konstant je následující:

σ *Prandtlovo číslo* (představuje poměr ztracené energie vlivem tření v tekutině a energie ztracené vlivem vedení tepla),

$r = \frac{Ra}{Ra_{krit}}$ *Rayleighovo číslo* (bezrozměrná míra rozdílu teplot horní a dolní části vrstvy tekutiny)

b parametr "velikosti" systému (vztahuje se k poměru výšky vrstvy a délky konvektivního proudění)

Výše uvedená soustava (3.1) se nazývá Lorenzův model konvektivního proudění v atmosféře.

4. Analýza Lorenzova modelu

U soustavy nelineárních diferenciálních rovnic je často nemožné explicitně vyjádřit řešení. Výjimku tvoří *singulární body* (viz Matematický aparát - kap. 2.1), u kterých jsme schopni v řadě případů úpravami algebraických rovnic dostat jejich explicitní tvar. Při vyšetřování stability těchto stacionárních bodů se obvykle využívá metoda *linearizace*.

Při zkoumání vlastností dynamických systémů vyšší dimenze $n > 2$ jsou velmi důležité *hyperbolické stacionární body* (viz Matematický aparát - Def. 2.2.2), což jsou singulární body, ve kterých má charakteristický polynom matice soustavy nenulové reálné části vlastních čísel. Jestliže bod není hyperbolický, dochází v něm ke strukturálním změnám stability systému - *bifurkacím* (viz Matematický aparát - kap. 2.4).

Kvalitativní vlastnosti modelu konvektivního proudění se obvykle provádí při hodnotách parametrů $\sigma = 10, b = 8/3$, které odpovídají atmosférickým podmínkám nucené konvekce. My je použijeme při posuzování stability v konkrétních bodech rovnováhy, kdy vyšetříme závislost soustavy na parametru r (v případě, kdy bude příliš obtížné obecně vyjádřit hledané hodnoty r). Tuto závislost si graficky znázorníme ve fázových portrétech systému v další kapitole.

4.1. Analýza stability Lorenzova modelu

Nejprve pro prozkoumání lokální stability systému *autonomních rovnic* (viz Matematický aparát - Def. 2.1.1) v okolí rovnovážných bodů provedeme úlohu *nalezení singulárních bodů*, kdy derivace v systému rovnic položíme rovny nule

$$0 = \sigma(y - x) \quad (4.1)$$

$$0 = rx - y - xz \quad (4.2)$$

$$0 = xy - bz \quad (4.3)$$

Tuto soustavu vyřešíme. Z rovnice (4.1) dostáváme $x = y$. Dosazením do (4.2) a (4.3) máme

$$0 = x(r - 1 - z)$$

$$0 = x^2 - bz$$

Nalezli jsme tedy tři singulární body

$$S_1 = (0, 0, 0) \text{ a } S_{2,3} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

Je zřejmé, že existence bodů $S_{2,3}$ je závislá na parametru r a to v následujícím smyslu

- pokud je $r < 1$, singulární body $S_{2,3}$ neexistují,
- jestliže $r = 1$, pak oba body splývají s bodem S_1 ,
- při $r > 1$ oba body existují samostatně.

Nyní si ukážeme algoritmus vyšetření chování nelineárního systému pomocí metody linearizace (tím zjistíme, jak se systém chová v okolí nalezených bodů rovnováhy).

Po provedení parciálních derivací jednotlivých složek soustavy dostáváme příslušnou *Jacobiho matici* (viz Matematický aparát - rovnice (2.2)) jako vyjádření

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Linearizovaná soustava náležící k (4.1) - (4.3) je tedy tvaru

$$\begin{aligned} x' &= -\sigma x + \sigma y \\ y' &= rx - zx - 1 - xz \\ z' &= xy + yx - bz \end{aligned}$$

Abychom zjistili lokální povahu singulárních bodů, dosadíme je do (4.4). Pro nalezení vlastních čísel matice, a tudíž i pro zjištění typů bodů rovnováhy, sestavíme charakteristickou rovnici $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ (viz Matematický aparát - kap. 2.2).

4.1.1. Stabilita v singulárním bodě S_1

Charakteristickou rovnici

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

upravíme na tvar

$$\lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + (\sigma + b + \sigma b - \sigma r)\lambda + \sigma b(1 - r) = 0.$$

Jedná se o algebraickou rovnici třetího řádu, jejíž kořeny jsou

$$\lambda_1 = -b \quad a \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}).$$

Dle znamének vlastních čísel následně určíme povahu singulárního bodu S_1 (klasifikace bodů rovnováhy viz Matematický aparát - kap. 2.3). Všimněme si, že první vlastní číslo je záporné, ostatní dvě pak závisí na hodnotách parametru r . Je tedy třeba zjistit, jak konkrétně vlastní čísla závisí na tomto parametru

- pokud $0 \leq r < 1$, pak jsou všechna vlastní čísla reálná a záporná
- jestliže $r > 1$, pak jsou dvě vlastní čísla reálná záporná a třetí je reálné kladné

Pokud $r = 1$, pak jsou kořeny rovnice následující

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -b \quad a \quad \lambda_3 = -\sigma - 1.$$

Z tvarů vlastních čísel vidíme, že jde o jednu nulovou a dvě záporné reálné hodnoty, kdy platí

$$\sigma - 1 < -\sigma + 1 < -b < 0.$$

Odtud máme podmínku pro odlišnost kořenů: $\sigma > b + 1$.

Shrnutí: Singulární bod S_1 je lokálně asymptoticky stabilní jestliže $0 \leq r < 1$, kdy se stává *atraktivním uzlem* (typ stability viz Matematický aparát - kap. 2.2.1). Pokud $r > 1$, počátek je nyní *sedlo* s dvoudimenzionální stabilní plochou a jednodimenzionální nestabilní křivkou. Při $r = 1$ neplatí linearizační věta (viz Matematický aparát - kap. 2.2), nejde o hyperbolický bod a tudíž nemůžeme touto metodou stabilitu v singulárním bodě S_1 posoudit.

4.1.2. Ljapunovova metoda pro singulární bod S_1

Ljapunovova metoda nám poskytne informaci o stabilitě konkrétního singulárního bodu bez užití linearizační věty. Spočívá v nalezení jeho určitého okolí tohoto singulárního bodu, kde je derivace příslušné Ljapunovovy funkce záporná.

Při splnění předpokladů Ljapunovovy věty (viz Matematický aparát - Věta 2.2.2) je příslušný stacionární bod asymptoticky stabilní (v lokálním smyslu). Navíc lze často pomoci dalších úvah (např. La Saleho princip invariance) rozhodnout o případné asymptotické stabilitě stacionárního bodu v globálním smyslu, tj. stanovit *oblast přitažlivosti* (viz Matematický aparát - Def. 2.2.5) Nevýhoda této metody tkví v tom, že neexistuje obecný návod na sestavení Ljapunovovy funkce.

Pokud se nám nepodaří sestavit příslušnou funkci definovanou v okolí singulárního bodu, splňující předpoklady pro Ljapunovskou stabilitu, nic to nevypovídá o jeho stabilitě, pouze jsme ji touto metodou neurčili.

Při nalezení největšího možného okolí určujeme *oblast přitažlivosti* ⁽¹⁾ asymptoticky stabilního singulárního řešení (La Saleho princip invariance).

Pro okolí singulárního bodu S_1 volíme tuto striktní Ljapunovovu funkci v \mathbb{R}^3

$$L(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2.$$

Po derivování

$$L'(x, y, z) = 2xx' + 2\sigma yy' + 2\sigma zz'.$$

Následně za derivace dosadíme rovnice linearizovaného systému ve stacionárním bodě S_1

$$\begin{aligned} L'(x, y, z) &= 2x(-\sigma x + \sigma y) + 2\sigma y(xr - y) + 2\sigma z(-bz) = \\ &= -2\sigma x^2 + 2\sigma xy + 2\sigma xyr - 2\sigma y^2 + 2\sigma(-b)z^2 = \\ &= -2\sigma(x^2 + y^2 - (1+r)xy) - 2\sigma bz^2 \end{aligned}$$

Aby byl bod S_1 asymptoticky stabilní, musí platit: $L'(x, y, z) < 0$.

¹jde o množinu všech počátečních podmínek, jejichž řešení směřují do singulárního bodu

Volbou $z = 0$ získáme funkci dvou proměnných

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - (1 + r)xy > 0 \text{ pro } (x, y) \neq (0, 0),$$

což platí podél osy y . Podél nějaké další přímky $y = mx$ v rovině xy poté dostaneme

$$g(x, mx) = x^2(m^2 - (1 + r)m + 1).$$

Pro kvadratickou funkci $m^2 - (1 + r)m + 1$ platí, že je kladná pro všechna m , jestliže $r < 1$. Tedy platí, že $g(x, y) > 0$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$.

Předchozími úvahami jsme potvrdili, že stacionární bod S_1 je asymptoticky stabilní (v lokálním smyslu). Pomocí některých dalších úvah lze navíc ukázat, že tento stacionární bod je asymptoticky stabilní v globálním smyslu, přesněji, že všechna řešení (2.1) konvergují k bodu S_1 při hodnotě parametru $r < 1$.

4.1.3. Stabilita v singulárním bodě $S_{2,3}$

Připomeňme, že singulární body $S_{2,3}$ má smysl uvažovat pouze při hodnotě parametru $r > 1$. Jelikož charakteristické rovnice obou singulárních bodů $S_{2,3}$ jsou stejné, uvedeme tedy pouze příslušný výpočet pro S_2 . Rovnici

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r - r - 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

upravíme do tvaru

$$P_r(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0. \quad (4.5)$$

Obecná analýza kořenů polynomu $P_r(\lambda)$ pomocí *Cardanových vzorců* (viz Matematický aparát - kap. 2.6) je velmi komplikovaná, proto uijeme jiné metody, které posoudí stabilitu soustavy v okolí $S_{2,3}$ v závislosti na měnícím se parametru r .

A) Platí

$$P_r(0) = 2\sigma b(r - 1) > 0 \text{ při } r > 1.$$

Protože koeficienty polynomu $P_r(\lambda)$ jsou kladné, je $P_r(\lambda)$ rostoucí pro $\lambda \geq 0$. Jinak vyjádřeno, $P_r(\lambda)$ nemá při $r > 1$ nezáporný reálný kořen. Ze spojitě závislosti kořenů polynomu na jeho koeficientech plyne, že při malé změně koeficientů charakteristického polynomu $P_r(\lambda)$ se o malou hodnotu změní i jeho kořeny. Jelikož při $r = 1$ má $P_r(\lambda)$ tři reálné kořeny - dva záporné a jeden nulový, z předchozí úvahy vyplývá, že při $r > 1$ (r dostatečně blízké 1), má $P_r(\lambda)$ tři záporné reálné kořeny.

B) Z hlediska analýzy stability je třeba posoudit, zda všechny tři kořeny $P_r(\lambda)$ setrvají v levé polorovině komplexní roviny i pro "větší" $r > 1$. Pro tento účel využijeme tzv. "*D-partition*" techniku.

Předpokládejme, že existuje ryze imaginární kořen $\lambda = i\omega$ pro nějaké $\omega \neq 0$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (4.5) a dostaneme

$$(i\omega)^3 + (i\omega)^2(1 + \sigma + b) + (i\omega)b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Po separování imaginárních a reálných členů máme

$$i(-\omega^3 + \omega b\sigma + \omega br) - (\omega)^2(1 + \sigma + b) + 2\sigma b(r - 1) = 0,$$

tj. je-li $\omega = 0$, pak $r = 1$. Poznamenejme, že tato skutečnost odpovídá tomu, že při $r > 1$ polynom $P_r(\lambda)$ nemá nulový kořen.

Je-li $\omega \neq 0$, první rovnici vydělíme ω a soustavu řešíme

$$-\omega^2 + b\sigma + br = 0 \tag{4.6}$$

$$-(\omega)^2(1 + \sigma + b) + 2\sigma b(r - 1) = 0 \tag{4.7}$$

Z rovnice (4.6) vyjádříme $-\omega^2 = -b\sigma - br$ a dosadíme do (4.7). Elementárními operacemi dojdeme k tomuto vyjádření

$$r^{**} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}, \quad \omega = \pm \sqrt{2b\sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}}$$

Jinak řečeno, (právě a pouze) při vypočtené hodnotě r^{**} má $P_{r^{**}}(\lambda)$ dvojici komplexně sdružených ryze imaginárních kořenů $\pm i\omega$ s výše vypočtenou hodnotou ω .

C) Z předcházejícího vyplývá, že musí existovat hodnota r^* s vlastností

$$1 < r^* < \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

taková, že polynom $P_r(\lambda)$ má při $r = r^*$ jeden dvojnásobný záporný reálný kořen a jeden jednoduchý záporný reálný kořen a při

$$r^* < r < \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

má $P_r(\lambda)$ dvojici komplexně sdružených kořenů se zápornými reálnými částmi a jeden záporný reálný kořen. Tuto hodnotu r^* se pokusíme určit pomocí Cardanových vzorců. Položíme

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2} = \frac{3b(\sigma + r) - (1 + \sigma + b)^2}{9} = \frac{1}{9}(b^2 + \sigma^2 - b\sigma + 2b + 2\sigma - 3br + 1)$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(1 + \sigma + b)^3}{27} - \frac{(1 + \sigma + b)b(\sigma + r)}{3} + 2\sigma b(r - 1)\right)$$

Tyto dva parametry poté dosadíme do $D = -p^3 - q^2 = 0$ (tedy limitní případ, kdy jsou všechny kořeny reálné, nad tuto hodnotu jde o jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené). Vzhledem k náročnosti výpočtu si volíme konkrétní (tradiční) hodnoty $\sigma = 10, b = 8/3$. Dostáváme

$$p = \frac{8}{9}r - \frac{961}{81}$$

$$q = \frac{556}{27}r + \frac{5201}{729}.$$

Dále

$$D = -\left(\frac{8}{9}r - \frac{961}{81}\right)^3 - \left(\frac{556}{27}r + \frac{5201}{729}\right)^2 = 0$$

Po numerickém výpočtu pomocí programu Maple dostáváme

$$r^* \doteq 1.3456.$$

Pro úplnost si pro zvolené parametry vypočteme i hodnotu r^{**}

$$r^{**} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} = 10 \frac{10 + \frac{8}{3} + 3}{10 - \frac{8}{3} - 1} \doteq 24.7368$$

D) Položme $r^{**} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$. Z části **A)** a **B)** vyplývá, že při $1 < r < r^{**}$ leží všechny tři kořeny $P_r(\lambda)$ v levé polorovině komplexní roviny a při $r = r^{**}$ leží dva kořeny na imaginární ose.

Ještě je třeba ukázat, co se s kořeny stane, pokud r překročí hodnotu r^{**} . Zda se budou pohybovat stále "doprava" (reálné části kořenů se stanou kladnými), či se vrátí na levou polovinu komplexní roviny. (Připomeňme, že opětovné protětí imaginární osy není možné, viz **B)**). To nám stačí ukázat pro jedno konkrétní $r > r^{**}$.

K posouzení stability také slouží *Routh-Hurwitzovo kritérium* (viz Matematický aparát - kap. 2.7), kde podle tvaru $P_3(\lambda)$ klademe

$$a_0 = 1, \quad a_1 = (1 + \sigma + b), \quad a_2 = b(\sigma + r), \quad a_3 = 2\sigma b(r - 1).$$

Nyní vypočítáme následující tři determinanty

$$H_1 = |a_1| = |1 + \sigma + b|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \sigma + b & 1 \\ 2\sigma b(r - 1) & b(\sigma + r) \end{vmatrix} = r(-\sigma + b + 1) + \sigma(\sigma + b + 3)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \sigma + b & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r - 1) & b(\sigma + r) & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r - 1) \end{vmatrix} = 2\sigma b(r - 1) \cdot H_2$$

Vidíme, že $H_1 > 0$, dále $H_3 > 0$, jestliže $H_2 > 0$ a zároveň $r > 1$. Stačí tedy analyzovat znaménko H_2 . Z podmínky $H_2 = 0$ nalezneme r^{**} (kdy je reálná část kořenů rovna nule) jako kořen rovnice

$$r(-\sigma + b + 1) + \sigma(\sigma + b + 3) = 0.$$

Po úpravě získáváme

$$r^{**} = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

Pro $r < r^{**}$, např.

$$r = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

platí

$$H_2 = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} (-\sigma + b + 1) + \sigma(\sigma + b + 3) = \frac{1}{2} \sigma(\sigma + b + 3) > 0,$$

což dokazuje správnost výsledku získaného jinou technikou v části **B**).

Snadno ověříme, že je-li $r > r^{**}$, např.

$$r = 2\sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1},$$

pak po dosazení do H_2 máme

$$H_2 = 2\sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} (-\sigma + b + 1) + \sigma(\sigma + b + 3) = -\sigma(\sigma + b + 3) < 0.$$

Tudíž v tomto případě je reálná část komplexně sdružených kořenů kladná, a tím je dokázáno, že dvojice komplexně sdružených kořenů se bude při všech $r > r^{**}$ pohybovat v pravé komplexní polorovině.

Shrnutí: Při posuzování lokální stability v bodech $S_{2,3}$ jsme zjistili, že při $r = 1$ jde o nehyperbolické body. Asymptotická stabilita je zaručena pro $r \in (1, r^{**})$, při $r \in (1, r^*)$ jde o *uzly* a při $r \in (r^*, r^{**})$ se jedná o ohniska. Je-li $r = r^{**}$ opět při této hodnotě parametru dle linearizační věty nemůžeme stabilitu singulárních bodů $S_{2,3}$ posoudit (vlastní čísla jsou ryze imaginární, tedy mají nulovou reálnou část - nehyperbolické body). Nestabilita nastává při $r > r^{**}$.

4.2. Lorenzův atraktor a chaos

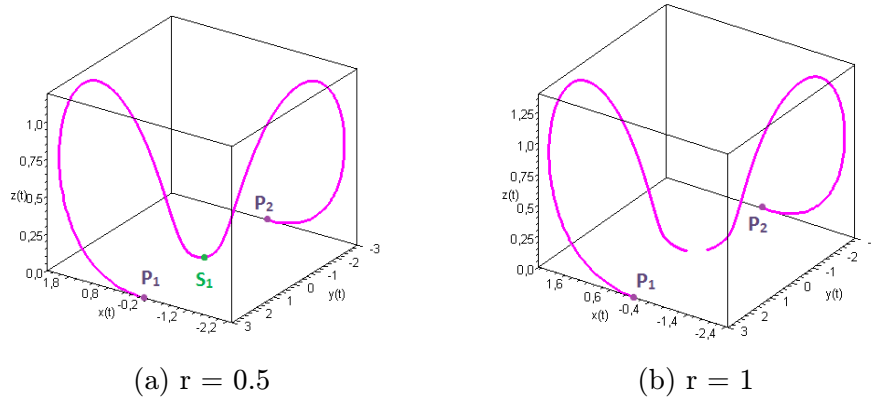
Nejprve zrekapitulujme poznatky z předchozí části.

Lorenzův systém nelineárních rovnic (3.1) je dynamický systém s parametrem. Konkrétně jsme řešili otázku závislosti tohoto systému na měnícím se Rayleighově čísle r .

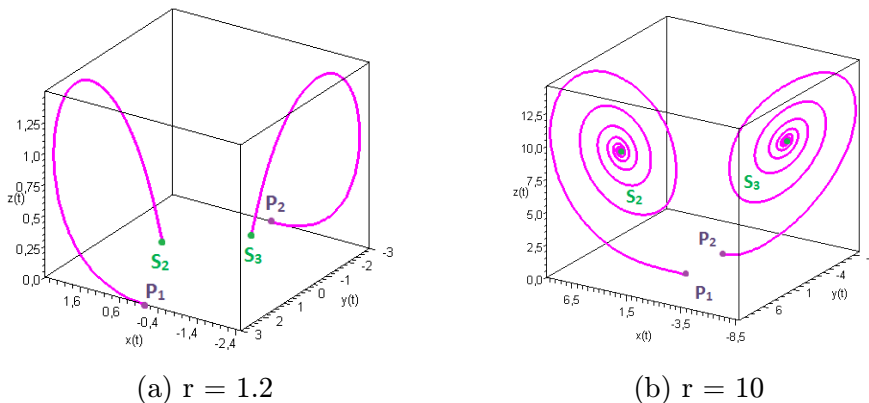
Nalezli jsme tři singulární řešení S_1 , S_2 a S_3 . Existence bodu S_2 a S_3 závisí právě na parametru r . Při volbě $r \in (0, 1)$ existuje jeden singulární bod S_1 , ostatní dva neexistují. Při $r = 1$ oba body S_2 a S_3 splývají s S_1 a teprve pro $r > 1$ existují samostatně.

V linearizované soustavě modelu jsme pomocí vlastních čísel Jacobiho matice určovali, jak se jednotlivá singulární řešení chovají v nějakém jejich okolí (šlo tedy o stabilitu v lokálním smyslu). V další části okomentujeme kritické změny stability či typu singulárních bodů pro vstupní parametry $\sigma = 10$ a $b = 8/3$.

Při volbě parametru $r \in (0, 1)$ je jediný singulární bod S_1 typu atraktivní uzel. Pro $r = 1$ neplatí linearizační věta, tudíž se nejedná o hyperbolický bod. Další analýzou jsme vyšetřili, že body S_2 a S_3 jsou stabilní v intervalu $r \in (1, 24.74)$, kde při $r \in (1, 1.35]$ jde o uzly a pro $r \in (1.35, 24.74)$ pak o ohniska. Pro $r = 24.74$ opět jsme touto analýzou nebyli schopni určit stabilitu singulárních bodů S_2 a S_3 . Pro hodnoty parametru $r > 24.74$ jsou všechny tři body rovnováhy nestabilní.



Obrázek 4.1: Singulární trajektorie: atraktivní uzel S_1 (a) a okamžik bifurkace (b)

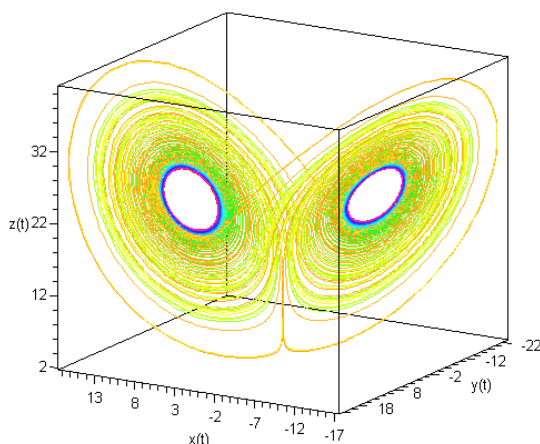


Obrázek 4.2: Singulární trajektorie: atraktivní uzly $S_{1,2}$ (a) a atraktivní ohniska $S_{1,2}$ (b)

Pro vykreslení trajektorií řešení v singulárních bodech $S_{1,2,3}$ uvedených na předchozí straně byly zadány dvě počáteční podmínky $P_1 = (0, 3, 0)$ a $P_2 = (0, -3, 0)$.

Dále si uvedeme poznatky, které jsme touto analýzou neodhalili. Ty nás zavedou až k Lorenzově atraktoru a podstatě chaotického chování dynamických systémů s parametrem. (viz [1] a [3])

První nejasnost při řešení stability se vyskytla, když byl parametr r roven 1. Právě tehdy nastává strukturální změna stability - *vidlicová bifurkace* (počátek ztrácí svou stabilitu za vzniku dvou bodů rovnováhy $S_{2,3}$). Další kritická hodnota, jejíž analýzu jsme pomocí metody linearizace nemohli provést byla $r^{**} = 24.74$. Označuje stav, kdy dochází ke tvrdé ztrátě stability systému - *Hopfova subkritická bifurkace* (viz Matematický aparát - kap. 2.4). Nutnou podmínkou vzniku této nestability je existence nestabilního limitního cyklu (viz Matematický aparát - Def. 2.2.4) již v oblasti parametrů předcházející jeho kritické hodnotě (v našem případě $r \in (0, 24.74)$). V Lorenzově modelu se tento cyklus poprvé objeví, když parametr r nabude hodnoty 13.926. Tehdy dojde k přestavbě fázového portréту, kdy se objeví dvě homoklinické smyčky sedla (zjednodušeně řešeno jde o trajektorie řešení, které se po vychýlení z rovnováhy pohybují směrem ven, aby se po čase opět vrátily do singulárního bodu). Dochází k *homoklinické bifurkaci*, kdy se oba homoklinické cykly rozpadají a vznikají nestabilní limitní cykly a to v místech ohnisek. Při nárůstu Rayleighova čísla r se postupně snižuje jejich amplituda a pro $r = 24.74$ pak tyto cykly splynou s ohniskem a předají jim svou nestabilitu. Pokud parametr $r > 24.74$, jsou všechny tři singulární body nestabilní a objevuje se invariantní limitní množina zvaná *Lorenzův (chaotický) atraktor* (viz Matematický aparát - kap. 5.6).



Obrázek 4.3: Lorenzův atraktor ($r = 24.8$)

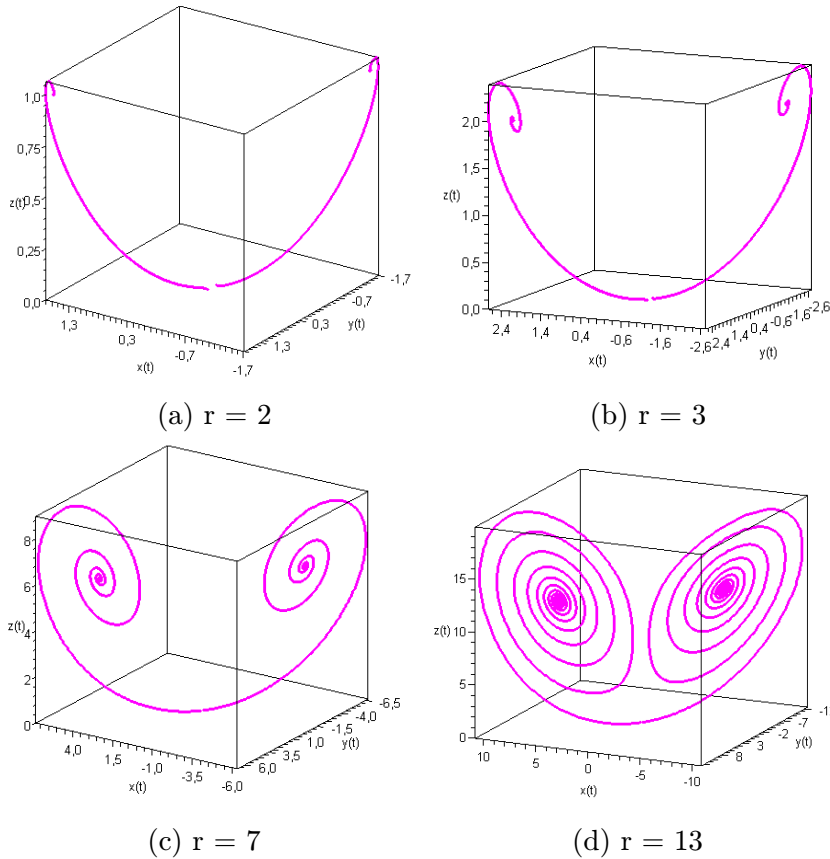
Nyní si uvedme typické vlastnosti chaotického atraktoru: tato množina je extrémně citlivá na počáteční podmínky - i malá změna může vést k nepředvídatelnému konečnému stavu. Dále je tvořena spojitou křivkou ve fázovém prostoru, která sice začíná v počátečním bodě, ovšem má nekonečnou délku. Navzdory tomu vyplňuje přesně vymezený prostor, ze kterého nikdy nevychází. Další vlastností je, že tento atraktor nikdy sám sebe neprotíná, nekříží se a neopakuje. Má tzv. *fraktální dimenzi* - částečnou dimenzi, kde si je soběpodobný (při různých měřítcích se vždy objevuje ta samá struktura atraktoru). Konečně průběh v prostoru je náhodný, chaotický, nepředvídatelný.

5. Grafické interpretace teoretických výsledků

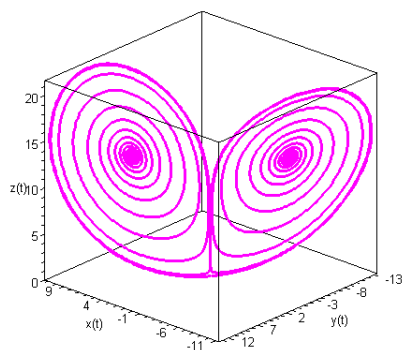
Jak jsme již uvedli v předchozí části této práce, tato kapitola se bude zabývat ověřením teoretických výsledků závislosti modelu atmosférického proudění vzduchu na parametru r , a to právě při hodnotách $\sigma = 10, b = 8/3$ vyhovujících atmosférickým podmínkám a způsobující chaotické chování, kdy se směr rotace ve vrstvě vzduchu při Rayleighově-Bénardově nestabilitě mění.

Pro následující vykreslení řešení soustavy (2.1) jsme volili dva počáteční stavy $P_1 = (0, -0.1, 0), P_2 = (0, 0.1, 0)$. Jak dále uvidíme trajektorie i pro takto blízké počáteční podmínky se chovají velmi odlišně.

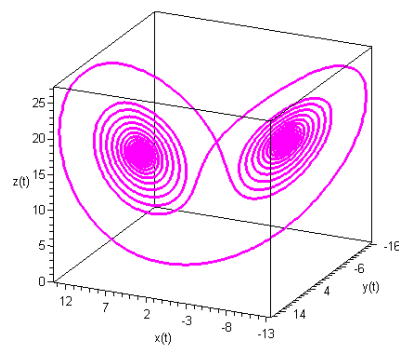
Volba parametru $r = 0.5$ se ve fázovém prostoru projeví jako singulární řešení typu atraktivní uzlu. Fyzikálně tento stav systému odpovídá situaci, kdy v tekutině nedochází ke konvekci a teplota se s výškou mění lineárně. Pro $r = 1$ již nejde o stabilitu. Pro další volby parametru se řešení chová následovně:



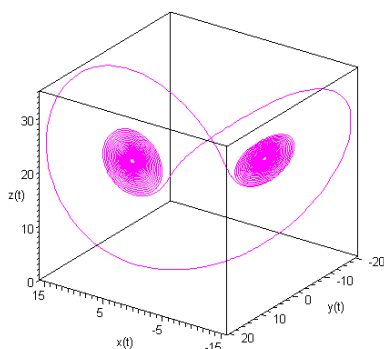
Obrázek 5.1: Singulární trajektorie: atraktivní ohniska



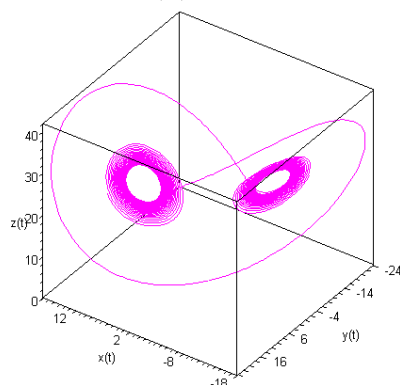
(a) $r = 13.926$



(b) $r = 17$



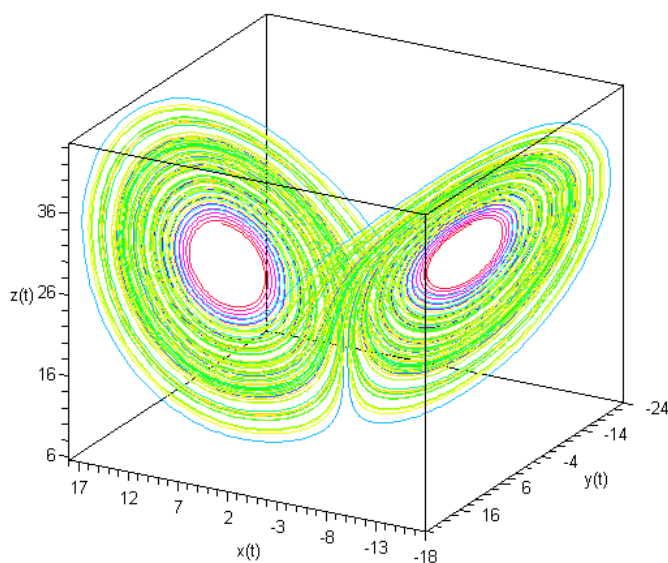
(c) $r = 21$



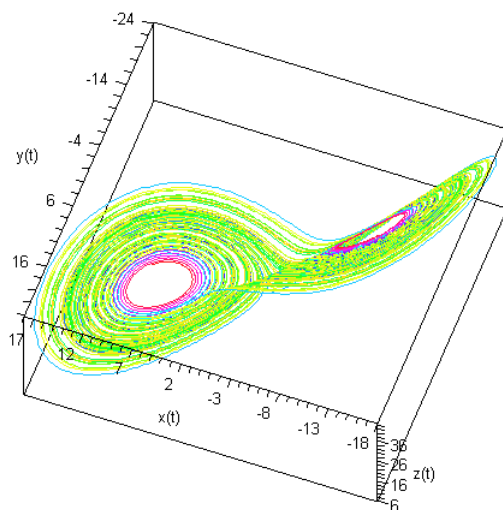
(d) $r = 24.74$

Obrázek 5.2: Singulární trajektorie: přechod k limitní množině

Pro typickou volbu parametru $r = 28$, pak vidíme limitní množinu, ke které systém spěje - Lorenzův atraktor. Chaotičnost chování trajektorií spočívá v tom, že nevíme, kolikrát jedno konkrétní řešení oběhne kolem singulárního bodu, než se odkloní ke druhému. Hodnota oběhů je nahodilá, neexistuje v ní žádná pravidelnost.

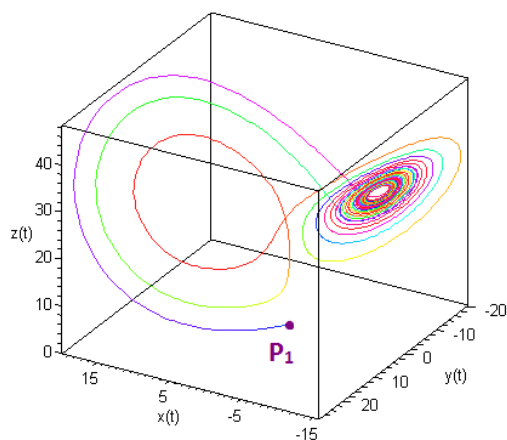


Obrázek 5.3: Lorenzův atraktor ($r = 28$)

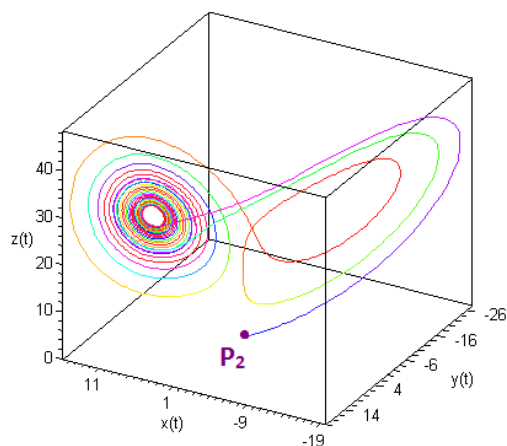


Obrázek 5.4: Lorenzův atraktor ($r = 28$) - pohled shora

Na závěr si ukážeme, jak se trajektorie odpovídající počátečním podmínkám $P_{1,2}$ v atraktoru chovají.



Obrázek 5.5: Lorenzův atraktor ($r = 28, P_1$)



Obrázek 5.6: Lorenzův atraktor ($r = 28, P_2$)

6. Závěr

Hlavním cílem této práce bylo provést analýzu Lorenzova dynamického modelu s parametrem r ležícím v oblasti stability a okomentovat souvislosti vedoucí k jeho chaotickému chování.

V úvodní kapitole jsme se seznámili s potřebným matematickým aparátem, který nás provedl základními pojmy nezbytnými k pochopení problematiky vyšetřování autonomních dynamických systémů. Konkrétní představou konvekce vrstvy tekutiny nás ilustrovala následující kapitola Sestavení Lorenzova modelu. Zde jsme si uvedli základní fyzikální rovnice, ze kterých se při odvození tohoto modelu vychází. Rovnice jsme popsali a uvedli příslušnou soustavu diferenciálních rovnic Lorenzova modelu proudění v atmosféře. Čtvrtá kapitola analyzovala stabilitu zkoumaného dynamického systému v závislosti na parametru r , jehož fyzikální význam je Rayleighovo číslo. Pomocí linearizační metody jsme posuzovali lokální stabilitu v konkrétních bodech rovnováhy. Nalezli jsme tři singulární body, přičemž hlavním záměrem bylo zjistit, jak konkrétně jsou tyto body závislé na parametru r . V případě prvního bodu rovnováhy jsme zjistili, že se jedná o singulární bod typu atraktivní uzel, právě když parametr r nabývá hodnot z intervalu $(0,1)$. Výsledky příslušných teoretických úvah jsme potvrdili použitím metody Ljapunovovy funkce. Pro hodnoty r z intervalu $(0,1)$ splývají zbývající dva body s prvním. Při hodnotě parametru $r = 1$ dochází ke kvalitativním změnám fázového portréту (k vidlicové bifurkaci), díky linearizační větě jsme stabilitu při této hodnotě parametru r nemohli posoudit. Dále pro ostatní dva stacionární body (při $r > 1$) byla analýza poněkud složitější. Použitím metody "D-partition" jsme našli hodnotu r^{**} , kdy dochází ke ztrátě stability. Tato hodnota byla rovněž potvrzena pomocí Routh-Hurwitzova kritéria. Poznamenejme, že použití Cardanových vzorců pro vypočtení r^{**} se jeví jako obtížně realizovatelné.

Dále jsme ukázali, že při užití originálních parametrů Lorenzova modelu jsou v intervalu $(1,1.35]$ oba singulární body typu atraktivní uzel a v intervalu $(1.35,24.74)$ se jedná o atraktivní ohniska. Při hodnotě $r = 24.74$ dochází k subkritické Hopfově bifurkaci a ke vzniku nestabilních limitních cyklů. Systém se stává silně nestabilní. Při dalším zvyšování parametru se objevuje Lorenzův atraktor potvrzující chaotické chování systému. Poslední kapitolu jsme věnovali ověřování teoretických výsledků z přechozí části pomocí grafických výstupů ze softwaru Maple.

Původní přínos této práce spočívá především v analýze stability soustavy nelineárních diferenciálních rovnic a souvisejících grafických interpretací. Při vyšetřování stability Lorenzova systému jsme vyzkoušeli několik zajímavých technik, které nám poskytly dobrý základ pro budoucí analýzu chaotického chování modelu. V dostupné literatuře takto podrobné zkoumání stability není. Většina pojmů a výsledků je použita z literatury uvedené na konci této práce.

Na výsledky této bakalářské práce je možné navázat podrobnější analýzou chaotického chování, kdy bychom mohli určovat, při jakých dalších hodnotách parametru r by docházelo k bifurkacím. Stejně tak lze zkoumat, jak by se Lorenzův systém nelineárních ODR1 choval v závislosti na ostatních dvou parametrech b a σ .

Literatura

- [1] HORÁK, Jiří a Ladislav KRLÍN. *Deterministický chaos a matematické modely turbulence*. Vyd. 1. Praha: Academia, 1996, 444 s. ISBN 80-200-0416-5.
- [2] POKORNÝ, Pavel. *Deterministický chaos - plod počítačové fyziky*. Československý časopis pro fyziku [online]. Vydáno: 2008, 58, 6 [cit. 2015-5-6]. Dostupné z: http://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/zluty/08-6_328-338_Pokorny_Deterministicky_chaos.pdf
- [3] ČIPERA, Stanislav. *Diferenciální rovnice a dynamické systémy*. Vyd. 1. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, 80 s. ISBN 80-01-03451-8.
- [4] HIRCH, M.W., SMALE, S., DEVANEY, R.: *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. San Diego, 2003, 417 p. ISBN 13 978-0-12-349703-1.
- [5] KRATOCHVÍL, Ctirad a Pavel HERIBAN. *Dynamické systémy a chaos*. Vyd. 2., rozš. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010, 229 s. ISBN 978-80-214-4152-1.
- [6] URBAN, P. *Heliový kryostat pro studium turbulentního proudění při přirozené konvekci*. 2009, Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009, 67 s. Vedoucí disertační práce RNDr. Věra Musilová, CSc.
- [7] KUNDU, Pijush K. *Hydrodynamics: Fluid Mechanics*. 5th ed. Academic Press, San Diego, California, USA, 2002, 891 p. ISBN 978-0-12-382100-3.
- [8] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Vyd. 2. Brno: CERM, 2008, 238 s. ISBN 978-80-214-3578-0.
- [9] Photos of Edward Lorenz. *MIT Technology Review*. [online]. [cit. 2015-4-30]. Dostupné z: <http://www.technologyreview.com/article/422855/photos-of-edward-lorenz/>
- [10] FRANČŮ, Jan. *Obyčejné diferenciální rovnice*. [online]. 2005-14-12 [cit. 2015-3-24]. Dostupné z: <http://ww.math.fme.vutbr.cz/default.aspx?catalog=3&catsrtext=27&catsrfield=38>
- [11] REKTORYS, Karel a Karel DRÁBEK. *Přehled užití matematiky*. 4., nezměn. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, 1139 s.
- [12] Equilibrium. *Scholarpedia*. [online]. [cit. 2015-3-26]. Dostupné z: <http://www.scholarpedia.org/article/Equilibrium>
- [13] REHÁK, Branislav. *Stabilní a centrální varieta nelineárních dynamických systémů a problém regulace výstupu*. [online]. [cit. 2015-5-6]. Dostupné z: http://www.crr.vutbr.cz/system/files/brozura_05_1204.pdf
- [14] MACUR, Jiří. *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1995, 87 s. ISBN 80-214-0698-4.